Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Integrale im $\mathbb{R}^n$
  - ↳ Kleiner Satz von Beppolevi
  - ↳ Kleiner Satz von Fubini
  - ↳ Transformationssatz

Integrale im $\mathbb{R}^n$:

Grundlage: Kleine Satz von Beppolevi:

(i) Jede beschränkte stetige Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ auf einer beschränkten, offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.

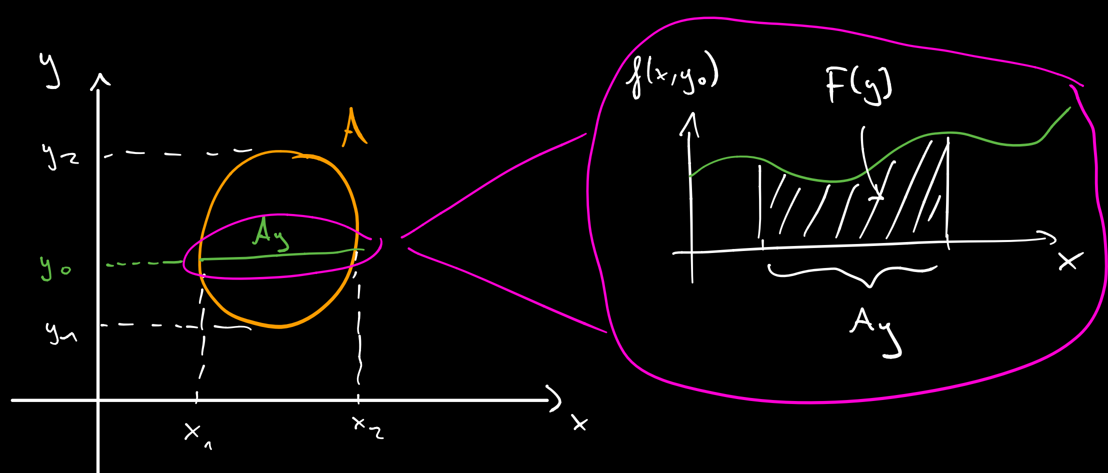
(ii) Jede stetige Fkt. auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.

Bem: Überlegt euch vor dem Ausrechnen eines Integrals immer kurz, ob dieses überhaupt existiert. Dies wird im Rahmen der Vorlesung natürlich praktisch immer der Fall sein.

Wie berechnen wir die Integrale: Kleiner Satz von Fubini:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x,y)$ kompakt oder offen und beschränkt.

Sei $f: A \to \mathbb{C}$ stetig beschränkt. Sei $A_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in A\}$ für $y \in \mathbb{R}^m$



Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A_y \neq \emptyset$ die Funktion $x \to f(x,y)$ über A_y integrierbar und es gilt:

Die Funktion $F(y) = \begin{cases} \int_{A_y} f(x,y)\,dx & A_y \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist über $\mathbb{R}^m$ integrierbar und

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

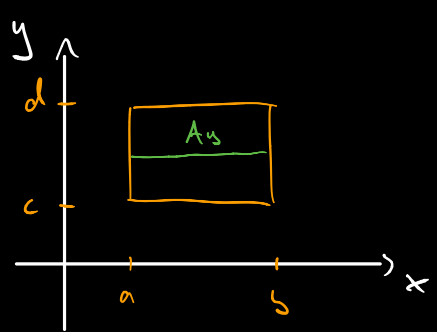
Bem.: Rolle von x & y im Satz vertauschbar

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Achtung: In der Praxis erspart die "richtige" Wahl der Integrationsreihenfolge oft Arbeit.

$\rightsquigarrow$ Das Erkennen dieser "richtigen" Wahl braucht vor allem viel Übung, da gibt es kein Rezept.

Bsp: Einfachste Fall: Integration über ein Rechteck $A = [a,b] \times [c,d]$ mit $f : A \to \mathbb{C}$ stetig.

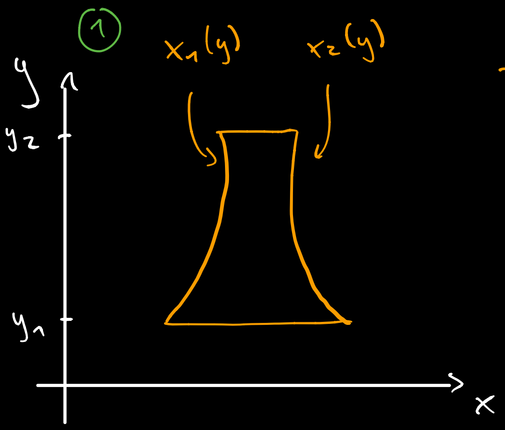


$$\Rightarrow \int_A f(x,y) \underbrace{d(x,y)}_{d\mu} = \int_{\mathbb{R}} \int_{A_y} f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{zuerst}}\,dy$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Bem.: Solch einfaches Vertauschen klappt nur bei universell einfachen Bereichen (in allen Variablen)!

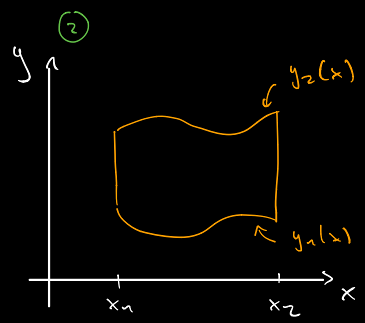
Bsp.: Häufigster Spezialfall: $n=m=1$: ① $A_y = [x_1(y), x_2(y)]$ oder analog ② $A_x = [y_1(x), y_2(x)]$



z.B.:

$$x_1 = \log(y)$$

$$x_2 = \frac{1}{y}$$



$$\Rightarrow \int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Bem.: Hier dürft ihr die Integrationsreihenfolge <u>nicht</u> einfach wechseln, da die inneren Grenzen von y abhängig sind! Ihr müsstet den Bereich erst zu einem x-einfachen Bereich umschreiben. Absolut Analoges gilt auch für

Bsp: $\int_\Omega f(x,y,z)\,d\mu$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}$

1. Schritt: Ω umschreiben zu einfachen Bereichen

↳ i) Wählen eine Variable für den einfachen Bereich: Hier z.B. x

⇝ "vergesse" alle anderen Variablen: $y = z = 0$

$$\Rightarrow x \geq 0,\ \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow \underline{0 \leq x \leq 1}$$

ii) Wählen nächste Variable für einfachen Bereich: Hier z.B. y
$\leadsto$ "vergesse" alle noch nicht beschränkten Variablen: $z=0$

$$\Rightarrow y \geq 0 \,,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1 \qquad \Rightarrow 0 \leq y \leq (1-\sqrt{x})^2$$

iii) Wiederhole ii), bis alle Variablen beschränkt:

$$\Rightarrow z \geq 0 \,,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1 \quad \Rightarrow 0 \leq z \leq (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

Bem.: Ihr dürft nie eine Variabel durch eine "vergessene" Variabel beschränken $\leadsto$ Kann sein, dass gewisse Wahlreihenfolgen bereits vorbestimmt sind!

$$\Rightarrow \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq (1-\sqrt{x})^2,\ 0 \leq z \leq (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y,z)\,d\mu = \underline{\underline{\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}}$$

Bsp: Volumen von $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{0 \leq x \leq 1}, y \geq 0, x+y \leq 1, \underbrace{0 \leq z \leq x^2}\}$

Da x bereits schön beschränkt, klare Wahl für i)

z dürfte man in i) z.B. nicht wählen!

1. Ω umschreiben:

(i) $0 \leq x \leq 1$

(ii) $0 \leq y \leq 1-x$

(iii) $0 \leq z \leq x^2$

Integrationsreihenfolge von y & z egal, da nur durch x beschränkt!

$$\Rightarrow \int_\Omega 1\,d\mu = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2} 1\,dz\,dy\,dx \quad \left(= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{1-x} 1\,dy\,dz\,dx \right)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [z]_0^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y x^2 \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) \cdot x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

Messbarkeit und Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst messbar, falls die Fkt. 1 über A integrierbar ist. Dann heisst

$$v_n(A) := \int_A 1 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \, dx = v(A)$$

das Volumen von A. Für $n=2$: 2-dimensionales Volumen $\hat{=}$ Flächeninhalt.

Nullmenge:

Def: Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heisst Nullmenge, falls sie messbar ist und

$$v_n(N) = 0.$$

Bem.: Integration über eine Nullmenge $= 0$?
$\rightsquigarrow$ Integration über eine Menge mit & ohne Rand ergibt also dasselbe Resultat, sofern beide Integrale existieren?

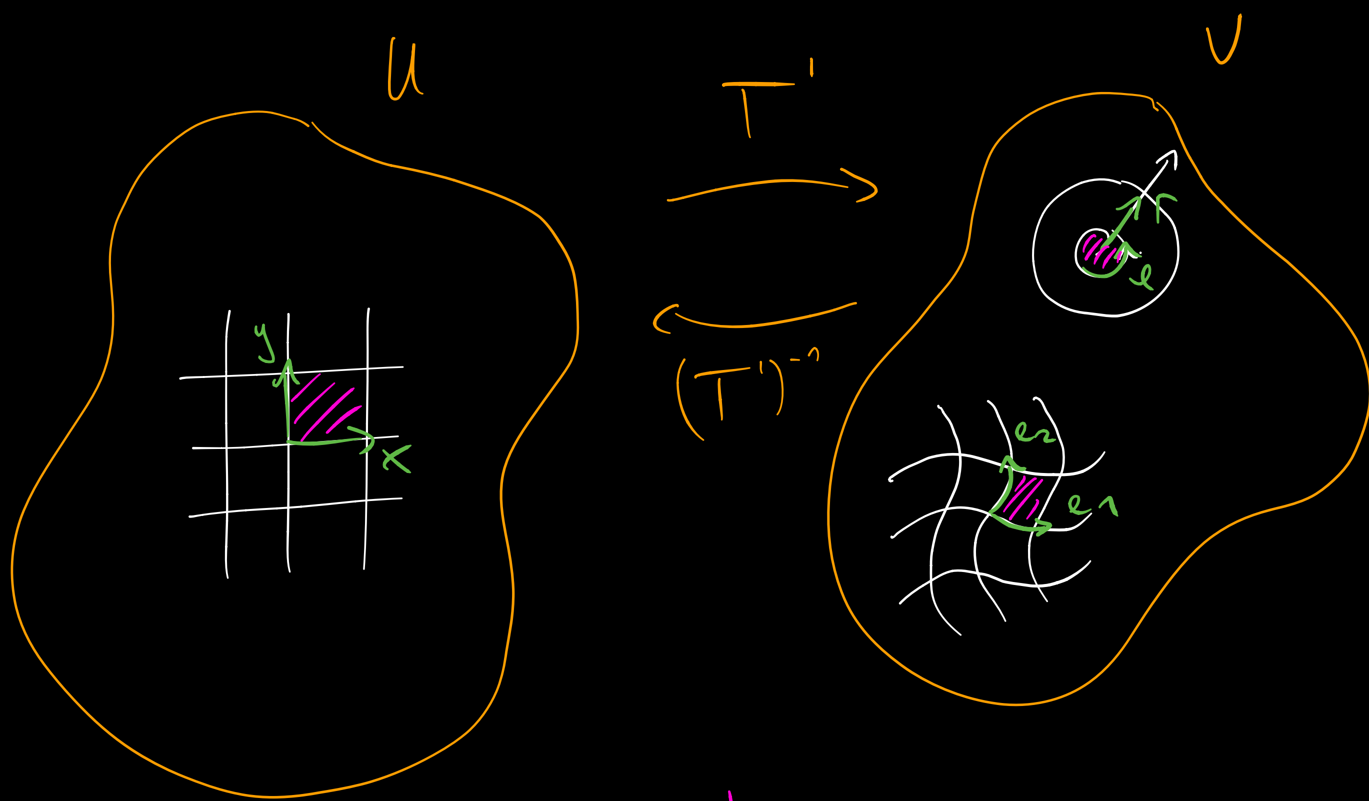
<u>Transformationssatz:</u> ("Substitutionsregel")

Satz: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $T : U \to V$ ein Diffeom.
Dann ist $f : V \to \mathbb{C}$ genau dann über V integr., falls $(f \circ T) \cdot |\det T'|$ über U integrierbar ist.
Dann gilt:

$$\int_U f(T(x)) \, |\det T'| \, dx = \int_V f(y) \, dy$$

Bem: Wir vollführen diese Transformation in den anderen Raum, weil dort meistens die Integrationsgrenzen um ein vielfaches schöner sind, und nur in 2. Linie wegen der zu integrierenden Funktion selbst – im Gegensatz zu Analysis I.

Intuition für $|\det T'|$:



det(Basisvektoren) = Flächeninhalt des Einheitsvierecks = 1

$\hat{=}$ "Volumenelement"

(= Flächenelement)

(= Linienelement)

$$\xrightarrow{T'} \det[e_1 \;\; e_2]$$

$$\det[T'x \;\; T'y]$$

$$\det[T']\det[x \;\; y]$$

$$= \det[T']$$

Bem.: Vergleich Substitutionsregel Analysis I

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy$$

⇝ analog zum Transformationssatz mit $T = g$

Wieso nicht $|g'(x)|$? Kurz: Weil g 1D?

- T muss ein Diffeom. sein ⇝ g streng ↗ o. ↘
- ↗: $g'(x) \geq 0$ ⇝ $|g'(x)| = g'(x)$
- ↘: $g'(x) \leq 0$ ⇝ $|g'(x)| = -g'(x)$ aber

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

$g(a) > g(b)$ ⇒

$$= -\int_{g(b)}^{g(a)} f(g(x))g'(x)dx$$

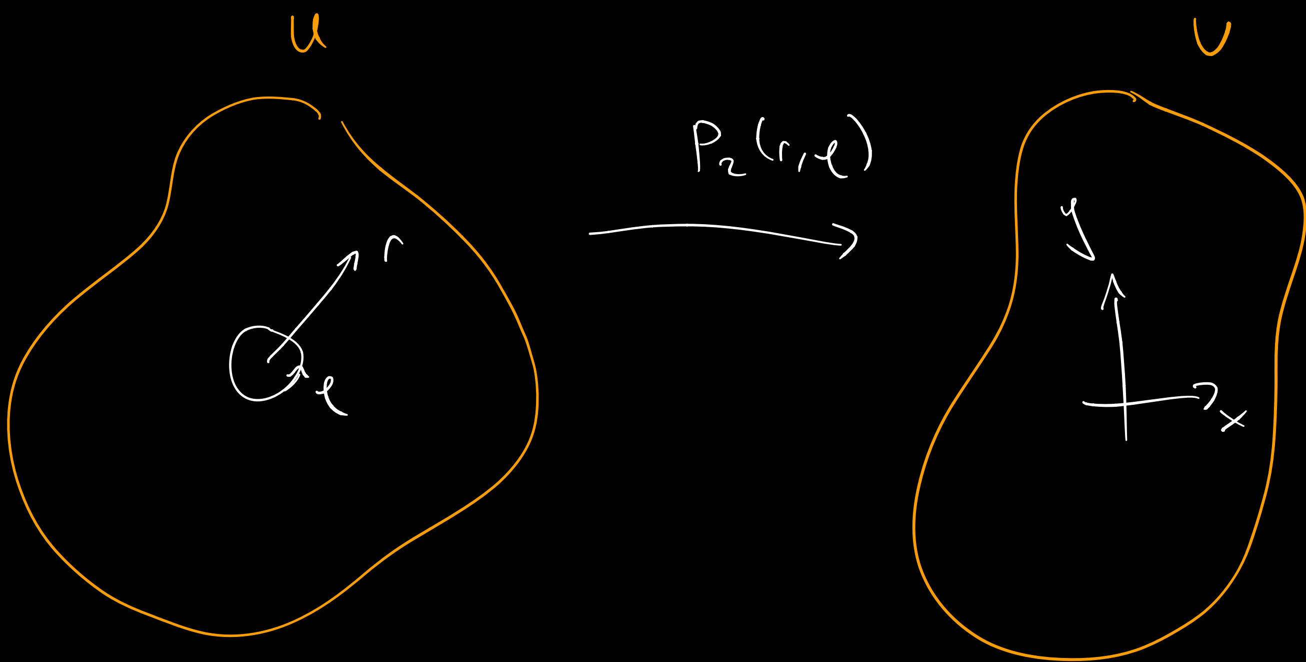
⇝ (−) der Integrationsgrenzen & (−) der Ableitung kürzt sich also raus?

⇒ 1:1 schlichtweg nicht nötig in 1D

Integration in Polar- bzw. Kugelkoordinaten:

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: (r,φ) $(r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi))$

$$P_2(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \int_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,|\det P_2'|\,d(r,\varphi) = \int_V f(x,y)\,d(x,y)$$

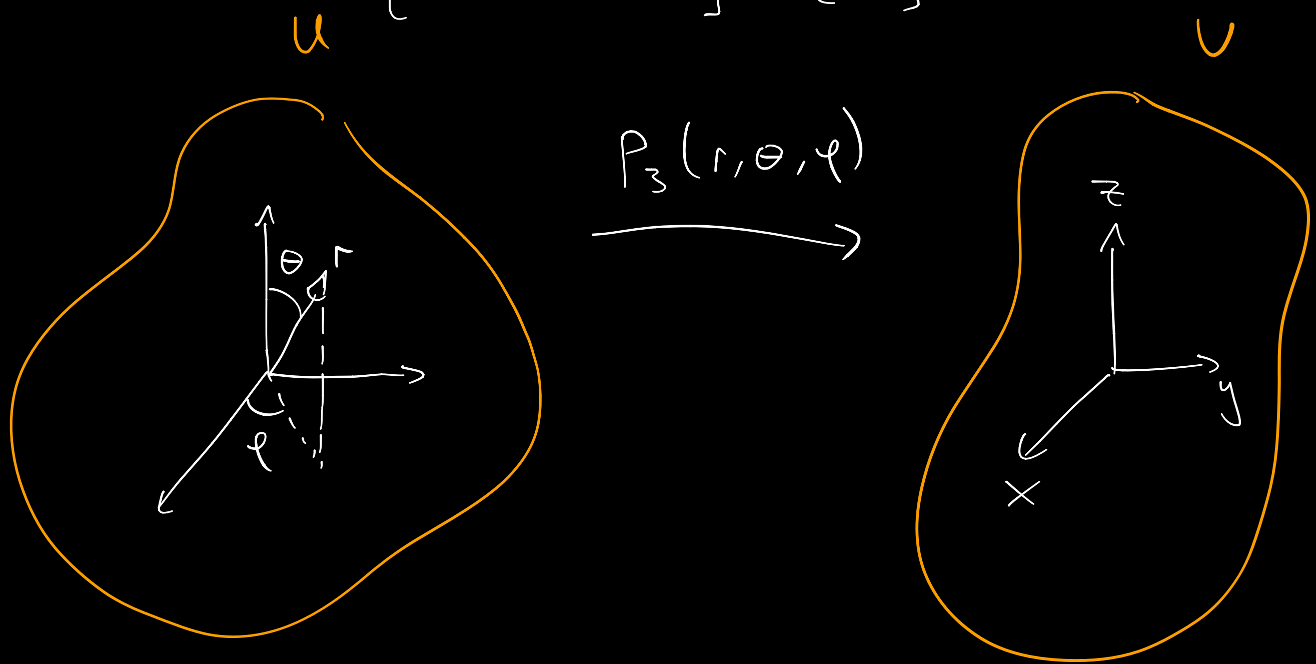
$$P_2' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \det(P_2') = r$$

$$\Rightarrow |\det(P_2')| = |r| = \boxed{\underline{\underline{r}}}$$ da $r \geq 0$

$$\Rightarrow \int_V f(x,y)\,d(x,y) = \underline{\underline{\int_U f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\cdot r \cdot d(r,\varphi)}}$$

<u>Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:</u> $(r,\theta,\varphi)\ (r \geq 0,\ \theta \in [0,\pi),\ \varphi \in [0,2\pi))$

$$P_3(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \int_U f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)\,|\det P_3'|\,d(r,\theta,\varphi) = \int_V f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

$$P_3' = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(P_3') = \cos\theta\left[r^2\cos\theta\sin\theta\right] + r\sin\theta\left[r\sin^2\theta\right]$$

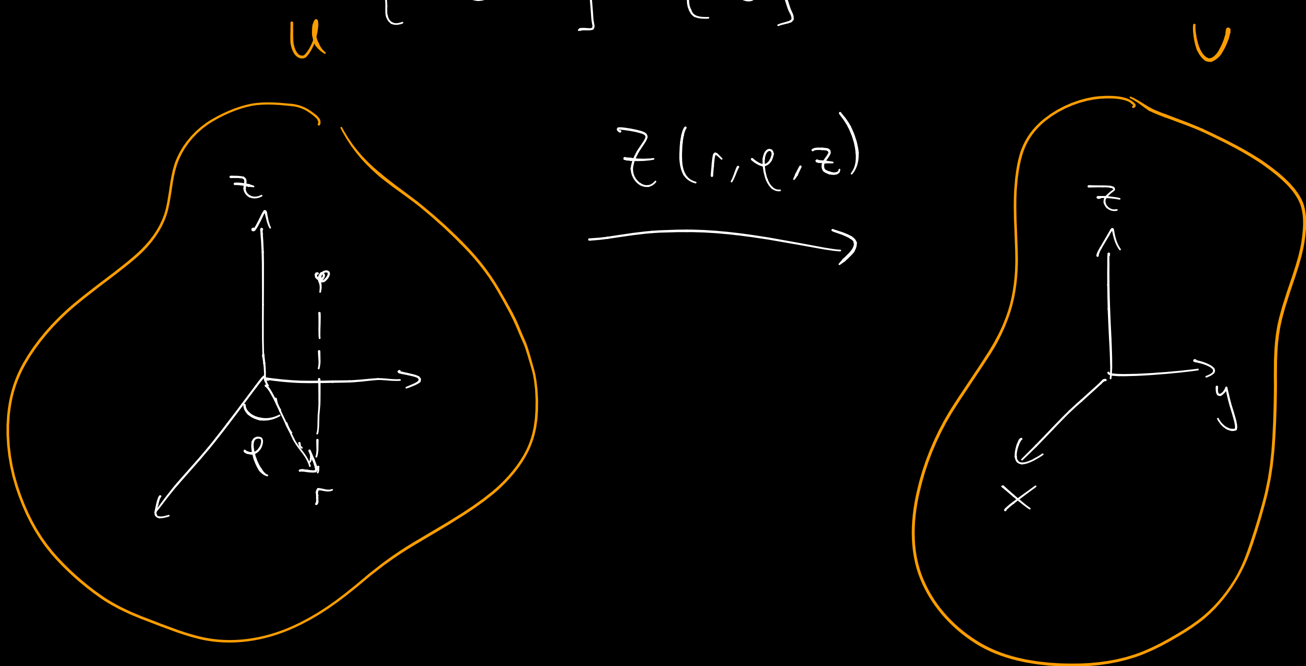
$$= r^2\sin\theta\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] = r^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow |\det(P_3')| = |r^2\underbrace{\sin\theta}_{\geq 0 \text{ für } \theta\in[0,\pi)}| = \boxed{r^2\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \int_V f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_U f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,d(r,\theta,\varphi)$$

Zylinderkoord. im $\mathbb{R}^3$: $(r,\varphi,z)\ (r\geq 0, \varphi\in[0,2\pi), z\in\mathbb{R})$

$$Z(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \int_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,|\det Z'|\,d(r,\varphi,z) = \int_V f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

$$Z' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Z') = \boxed{\underline{\underline{r}}}$$

$$\Rightarrow \int_V f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \underline{\underline{\int_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d(r,\varphi,z)}}$$